Урок №7 (25.10.2018)
Энергия электрического поля

1. *Работа по заряду конденсатора*

Рассмотрим произвольный конденсатор, ёмкости C. Посчитаем работу, которую необходимо совершить для того, чтобы зарядить его до заряда Q.

Очевидно, что пока конденсатор не заряжен, работа по перемещению элементарного заряда Δq с одной обкладки на другую равна нулю.

Посчитаем теперь работу по перемещению элементарного заряда Δq при условии, что конденсатор уже заряжен до заряда q. Тогда, по определению емкости, разность потенциалов между обкладками равна $U = q/C$. Следовательно, работа которую надо совершить по перемещению заряда Δq, равна $\Delta A = \Delta qU = \Delta qq/C$, т.е. равна площади прямоугольника толщиной Δq и высотой q/C. Очевидно, что полная работа по заряду конденсатора от нуля до Q будет $A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ – площадь треугольника.

Очевидно, что величина $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ – это и есть энергия заряженного конденсатора.

2. *Плотность энергии электрического поля*

Подставим выражение емкости плоского конденсатора в выражение для энергии, полученное выше: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2V$, где V – объем внутри конденсатора.

Видно, что энергия заряженного плоского конденсатора пропорциональна объему, в котором присутствует однородное поле $\vec{E}$. Видимо, можно ввести специальную величину *плотность энергии*: $\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2$. Произвольное поле можно разбить на маленькие плоские конденсаторы, следовательно, для любого электростатического поля, приведенная выше формула верна.

3. *Превращения энергии в конденсаторах и работа источника*

Важно! Два существенно разных случая: отключённый конденсатор и конденсатор, подключённый к источнику ЭДС.

Увеличим расстояние между пластинами конденсатора от d_1 до d_2 двумя способами: когда конденсатор заряжен и отсоединен от источника напряжения и когда он подсоединён к источнику U_0.

Отключённый конденсатор.

В первом случае у нас сохраняется заряд на обкладках: q. Так как работа совершается только внешними силами, то $W_2 - W_1 = A$. Но $W = \dfrac{q^2}{2C}$, откуда $A = \dfrac{q^2}{2}\left(\dfrac{1}{C_2} - \dfrac{1}{C_1}\right)$.

Подставляя $q = C_1 U_1$ и $C_i = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_i}$, получим $A = \dfrac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2 d_1^2}\left(d_2 - d_1\right)$.

Учтём, что $S\left(d_2 - d_1 = {}_{\Delta} V\right)$ – это изменение объёма конденсатора, а $\dfrac{U_1^2}{d_1^2} = E^2$ – квадрат поля, заключённого внутри этого объёма, получим ожидаемую формулу: $A = \omega \cdot {}_{\Delta} V$ (где ω – полученная выше плотность энергии электрического поля).

Обратим внимание, что в случае отключённого конденсатора поле в нём не меняется при изменении расстояния между пластинами.

Подключённый конденсатор.

Во втором случае изменение энергии конденсатора определяется как работой внешних сил, так и работой источника напряжения (он перемещает заряды): $W_2 - W_1 = A + A_{ист}$. Запишем: $W_2 - W_1 = \dfrac{C_2 U_0^2}{2} - \dfrac{C_1 U_0^2}{2} = \dfrac{U_0^2}{2}\varepsilon_0 S\left(\dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_1}\right)$. При этом источник совершает работу $A_{ист} = U_0\left(q_2 - q_1\right)$, где q_1 и q_2 – заряд на обкладках конденсатора до и после совершения работы соответственно. Подставляя в эту формулу выражение для заряда плоского конденсатора $q = CU = \dfrac{\varepsilon_0 S U}{d}$, получим $A_{ист} = U_0^2 \varepsilon_0 S\left(\dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_1}\right)$. Заметим, что работа источника напряжения в два раза больше изменения энергии поля в этом случае.

Обратить внимание, что в рассмотренном случае работа источника отрицательна, т.е. либо источник заряжается (аккумулятор), либо нагревается (батарея).

4. Энергия конденсатора с диэлектриком.

Отключённый конденсатор.

Энергия конденсатора, отсоединенного от источника напряжения, без диэлектрика равна $W = \dfrac{Q^2}{2C}$, а с диэлектриком $W' = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon C} = \dfrac{W}{\varepsilon}$. Следовательно, диэлектрик «втягивается» в конденсатор.

Подключённый конденсатор.

Найдём силу втягивания диэлектрика в подключённый конденсатор: ${}_{\Delta}W = A_{ист} - F_{эл}\ {}_{\Delta}x$. Но $A_{ист} = 2{}_{\Delta}W$, следовательно ${}_{\Delta}W = F_{эл}\ {}_{\Delta}x$. При вдвигании в подключенный конденсатор диэлектрика на расстояние Δx объем свободного поля уменьшается на $\Delta V = S\Delta x$, а объем поля в диэлектрике, в свою очередь, возрастает на ту же величину:

$\Delta W = \left(\omega_{\varepsilon} - \omega\right)\Delta V = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)E^2 S\Delta x = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\dfrac{U^2}{d^2}S\Delta x$. Отсюда получаем, что $F_{эл} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\dfrac{U^2}{d^2}S = \varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\dfrac{U^2}{2}\dfrac{l}{d}$, где l – поперечный размер пластины.